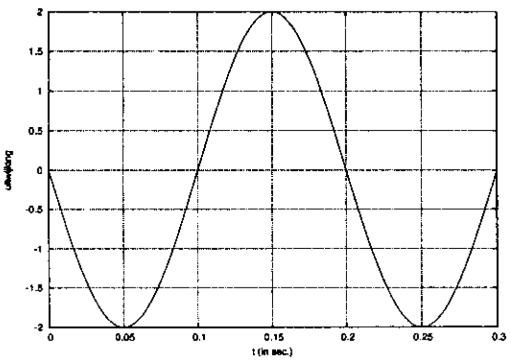
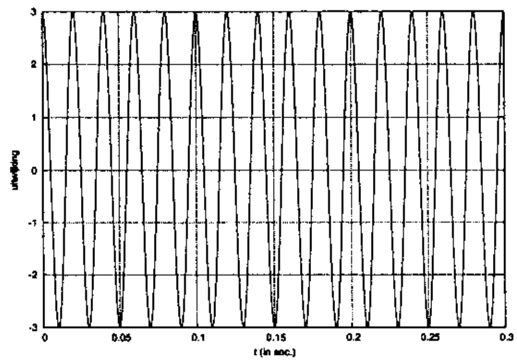
Tentamen Systemen & Signalen

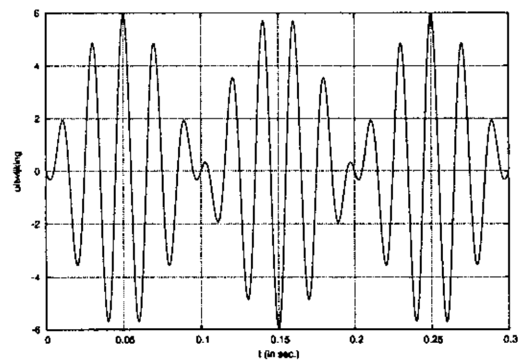
Donderdag 5 juli 2007, 8:30-11:30 uur, Tennishal

- Lees eerst een opgave volledig door alvorens deze te maken. Schrijf netjes en zorgvuldig.
- Bij dit tentamen is een formuleblad beschikbaar. Als je gebruik maakt van een formule van dit blad, vermeld dan het nummer van de formule. Andere literatuur, zoals het boek, mag niet geraadpleegd worden. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, mits dit geen grafische calculator is.
- Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. Je krijgt 1 punt cadeau. De opgaven 1, 3 en 4 zijn ieder 2 punten waard. De tweede opgave is 3 punten waard.

Opgave 1: signalen en spectra
In de onderstaande figuren zijn 3 continue signalen (uitwijking als functie van de tijd) weergegeven.







(a) Geef voor ieder signaal een formule voor de uitwijking als functie van de tijd.

(b) Gegeven zijn de continue signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$

$$x(t) = 2\cos(200\pi t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(10\pi t + \pi) \\ z(t) &= x(t)y(t) \end{aligned}$$

Schrijf ieder van deze signalen als een som van complexe e-machten, waarbij de som zelf niet complex is.
(c) Teken voor ieder van deze signalen het spectrum. Geef waarden langs de assen en geef voor de frequentiecomponenten aan wat de fase is.
(d) Het signaal $z(t)$ is van een speciaal type. Wat is de naam van dit type signalen? Leg uit wat je hoort als je luistert naar het signaal $z(t)$.
(e) Een pianostemmer kan m.b.v. een A-stemvork (genereert een zuivere toon van 440 Hz) de A-toets van een piano stemmen. Leg uit hoe dit werkt.

Opgave 2: LTI-systemen
Gegeven is het discrete signaal $x[n]$ dat wordt gedefinieerd door

$$x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + 5\delta[n-3] + 4\delta[n-4] + \delta[n-5].$$

Dit signaal plaatsen we op de invoer van een onbekend LTI-system F_0. De uitvoer van dit systeem is het discrete signaal $y[n]$

$$y[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 7\delta[n-3] + 11\delta[n-4] + 6\delta[n-5] + 4\delta[n-6] + \delta[n-7].$$

(a) Wat betekent het dat F_0 een zgn. LTI-systeem is?
(b) Het systeem F_0 is te schrijven als een convolutie met een lineaire combinatie van δ-functies (de zgn. unit impulse respons). Hoeveel termen heeft deze expressie?
(c) Bepaal de unit impulse respons van het systeem F_0.

Een ander LTI-systeem F_1 wordt gegeven door de unit impulse respons

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2].$$

(d) Wat is de uitvoer van het systeem F_1 als we op de invoer het signaal $z[n]$ plaatsen, waarbij

$$z[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] + 3\delta[n-5].$$

(e) Geef een voorbeeld van een invoer van F_1 die als uitvoer $y[n] = 0$ (voor alle n) oplevert. Uiteraard wordt hier niet gevraagd om de triviale input die overal 0 is.
(f) Wat is de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}})$ van het systeem F_1?
(g) Gegeven is een derde LTI system F_2. Dit systeem heeft als frequentierespons $H_2(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}}$. Bepaal de impulsrespons van het systeem dat verkregen wordt als we de uitvoer van het system F_1 koppelen aan de invoer van het systeem F_2.

Opgave 3: Fourier analyse
Gegeven zijn 2 periodieke signalen $x(t)$ en $y(t)$ met $x(t) = x(t+8)$ en $y(t) = y(t+8)$ voor alle t. Tevens is gegeven

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{voor } 4 \le t < 8 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \le t < 2 \\ 1 & \text{voor } 2 \le t < 4 \\ 0 & \text{voor } 4 \le t < 6 \\ 1 & \text{voor } 6 \le t < 8 \end{cases}$$

(**a**) Bepaal van beide signalen de periode (T_0). Schets beide signalen als functie van de tijd over het interval $-2T_0$ tot $2T_0$.
(**b**) Bepaal de DC-component van beide signalen.
(**c**) Laat zien dat de Fourier-coëfficienten a_k (voor $k \neq 0$) van het signaal $x(t)$ gegeven worden door

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{voor } k \text{ even} \\ \frac{1}{j\pi k} & \text{voor } k \text{ oneven} \end{cases}$$

(**d**) Laat $z(t)$ een signaal zijn waarvan de Fourier-coëfficienten a_k bekend zijn. Laat $z_1(t) = z(2t)$, m.a.w. het signaal met dubbele frequentie. Geef expressies voor de Fourier-coëfficienten van het signaal $z_1(t)$ in termen van de Fourier-coëfficienten van $z(t)$.
(**e**) Bepaal de Fourier-coëfficienten a_k van het signaal y.
(**f**) Bepaal de Fourier-coëfficienten van het signaal $s(t) = 3sin(5\pi t)$.
[Hint: Je hoeft hiervoor geen integralen te bereken.]

Opgave 4: z-transformaties

Gegeven is een FIR-filter met system functie $H(z) = 1 - \cos(\frac{n\pi}{4})z^{-1} + z^{-2}$.
(**a**) Laat $x[n]$ een discreet signaal zijn dat we op de invoer van dit filter aanbieden. Laat $y[n]$ de uitvoer van het filter zijn. Wat is de differentie-vergelijking voor $y[n]$ in termen van $x[n]$?
(**b**) Bepaal de nulpunten van de systeemfunctie. Wat is het belang van deze nulpunten?
(**c**) Wat is de uitvoer van dit filter als we het signaal $x[n] = \cos(\frac{n\pi}{4})$ op de invoer plaatsen?
(**d**) Wat is de systeemfunctie van een FIR-filter dat de frequentie $\hat{w}_0 = \frac{\pi}{3}$ volledig verwijderd (uiteraard wordt de triviale oplossing $H(z) = 0$ niet gevraagd)?
(**e**) Laat $x[n] = y[n] + \cos(\frac{n\pi}{4}) + \cos(\frac{n\pi}{3})$, waarbij $y[n]$ een gegeven discreet signaal is. Wat is de systeemfunctie van het FIR-filter dat voor zowel de invoer $x[n]$ als $y[n]$ dezelfde uitvoer geeft? Uiteraard wordt ook nu niet de triviale oplossing $H(z) = 0$ gevraagd.